**DEVOIR MAISON N°4**

**MATHS FINANCIÈRES : COMMENT GAGNER DE L'ARGENT SANS RIEN FAIRE ?**

À rendre pour le jeudi 7 décembre. Les calculatrices sont autorisées !

## Exercice : placement financier

Chaque établissement bancaire propose plusieurs options à un client qui souhaite « placer » son argent : le client dépose alors une somme d'argent sur un compte de la banque. Puis, si le client ne retire pas tout ou partie de cette somme pendant un an (par exemple), la banque verse un montant supplémentaire sur le compte, qu'on appelle des *intérêts*. Les intérêts sont calculés selon un certain taux. Le client n'a rien à faire : chaque année, le montant sur le compte augmente petit à petit grâce aux intérêts.
On suppose qu'on dispose d'une somme d'argent $S > 0$ qu'on souhaite placer. Le taux annuel du compte est noté $r > 0$ et exprimé sous forme de pourcentage. Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $A_k$ la somme sur le compte après $k$ années. À la fin de l'année $k+1$, le montant des intérêts gagnés est $rA_k$, qui s'ajoute à la somme $A_k$ déjà présente. Ainsi, la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\begin{cases} A_{k+1} = (1+r)A_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \\ A_0 = S \end{cases}$$

Par exemple, si $r = 10\%$, alors $A_{k+1} = \left(1 + \dfrac{10}{100}\right) \times A_k$. Au bout d'un an, on dispose ainsi de la somme $A_1$.

Cependant, certains comptes calculent les intérêts chaque mois plutôt que chaque année. Pour un taux annuel $r$, le taux mensuel correspondant est $\dfrac{r}{12}$. Dans ce cas, si on note $M_k$ la somme sur le compte à la fin du mois $k$, on a

$$\begin{cases} M_{k+1} = \left(1 + \dfrac{r}{12}\right) M_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \\ M_0 = S \end{cases}$$

Au bout d'un an (i.e. 12 mois), on dispose ainsi de la somme $M_{12}$.

1) Déterminer $M_{12}$. Comparer avec $A_1$ pour un taux $r = 10\%$ (la calculatrice est autorisée !). Lequel des deux placements est le plus avantageux ?

Plus généralement, on peut trouver des placements qui calculent les intérêts avec $n$ échéances sur un an, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour un taux annuel $r$, le taux correspondant pour chaque échéance est ainsi $\dfrac{r}{n}$. Si on note $I_k$ le montant sur le compte à la fin de l'échéance $k$, on a ainsi

$$\begin{cases} I_{k+1} = \left(1 + \dfrac{r}{n}\right) I_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \\ I_0 = S \end{cases}$$

Au bout d'un an (i.e. $n$ échéances), on dispose ainsi de la somme $I_n$.

2) Déterminer $I_n$.

3) On s'intéresse à la limite de $I_n$ quand $n$ tend vers l'infini [1]
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire la limite de $I_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Comparer avec $M_{12}$ et $A_1$.

   (En pratique, on peut montrer que la suite $n \mapsto \left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ est croissante, de sorte que plus il y a d'échéances, plus on gagne de l'argent au bout d'un an, ou même d'une durée quelconque).

*Parenthèse :* quand on passe à l'infinitésimal, il est plus pratique de passer du discret (suites) au continu (fonctions). Si on note $y(t)$ le montant d'argent sur le compte au temps $t$ (en année), on peut donc dire que pendant un temps infinitésimal $dt$,

$$\begin{cases} I_{k+1} = \left(1+\dfrac{r}{n}\right) I_k \\ I_0 = S \end{cases} \qquad \underset{\frac{1}{n}\to dt \quad k\to t \quad k+1\to t+dt}{\rightsquigarrow} \qquad \begin{cases} y(t+dt) = (1+r\,dt)y(t) \\ y(0) = S \end{cases}$$

On peut réécrire l'équation en

$$\frac{y(t+dt)-y(t)}{dt} = ry(t)$$

c'est-à-dire quand $dt$ tend vers 0 :

$$\begin{cases} y'(t) = ry(t) \\ y(0) = S \end{cases}$$

4) Résoudre cette équation. Quelle valeur de $r$ permet de doubler la mise après 1 an, i.e. $y(1) = 2y(0)$ ?
5) On suppose que le taux fluctue suite à des effets inflationnistes : au lieu d'être constant égal à $r$, il vaut $r\,(1+\alpha\sin(2\pi t))$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ (y compris $\alpha > 1$ de sorte que le taux puisse être négatif par instants). Reprendre la question précédente. Que peut-on dire de l'influence de $\alpha$ sur le résultat ?

En pratique, les banques limitent le taux quand la valeur du placement $y(t)$ est trop élevé. On considère donc un taux dégressif

$$\overline{r}(y) = \frac{r}{y^2} \qquad r > 0 \qquad \begin{cases} y' = \overline{r}(y) \times y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On admet que cette équation admet une unique solution $y$ définie sur $\mathbb{R}_+$ strictement positive.

6) Résoudre l'équation ci-dessus sur $\mathbb{R}_+$. Quel taux $r$ permet d'avoir $y(1) = 2y(0)$ ?

1. Cela correspond à un taux « infinitésimal » : avec $n = 365$, les intérêts sont calculés chaque jour avec le taux $\dfrac{r}{365}$ ; avec $n = 365 \times 86400$, les intérêts sont calculés chaque seconde avec le taux $\dfrac{r}{365 \times 86400}$, etc.